Jurnal MIPA 37 (2) (2014): 130-135

Jurnal MIPA

http://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/JM

TRANSFER PANAS LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD

Y Tiandho✉ Triyanta

KK Fisika Teori Energi Tinggi dan Instrumentasi, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima Agustus 2014
Disetujui September 2014
Dipublikasikan Oktober 2014

Keywords:
black hole, heat transfer, thermodynamics, general relativity

Abstrak

Mekanika kuantum menunjukkan bahwa lubang hitam memiliki temperatur sebagai indikasi dapat mengemisikan partikel. Persamaan transfer panas secara general mengandung operator Laplacian yang sifatnya dipengaruhi oleh ruang. Kelengkungan ruang-waktu di daerah sekitar lubang hitam sangat besar sehingga operator Laplacian untuk menghitung distribusi temperaturnya merupakan Laplacian ruang lengkung. Persamaan Fourier untuk lubang hitam Schwarzschild bergantung pada jarak dan radius Schwarzschild. Pada keadaan tunak solusi dari komponen radius mengandung polinomial Legendre dan solusi dari komponen sudut ruang mengadung fungsi *spherical harmonics*. Untuk kasus dengan persamaan diferensial terhadap waktu bernilai konstan solusi menyimpulkan bahwa temperatur bertambah seiring waktu. Hasil yang telah didapatkan secara umum dapat digunakan untuk menentukan distribusi temperatur pada ruang lengkung akibat suatu objek bermassa *M*. Koreksi ini sekaligus menggambarkan peristiwa transfer panas dalam konteks relativitas umum.

Abstract

Quantum mechanics show that black hole has temperature that indicated that black hole can emit particles. Generally the heat transfer equation contains Laplacian operators that is influenced by space. The space-time arch in the surrounding of black hole is very big so that Laplacian operators to calculate the temperature distribution is the arch space Laplacian. Fourier equation for Schwarzschild black hole is depended on the distance and radius of Schwarzschild. At ateady state the dolution od radius component containing Legendre polynomial and the solution of component corner containing spherical harmonics function. For the case with differential equationon the constant time, the solution is that temperature will increase over time. The result can generally be used to determine the distribution of temperature in the arch space due to mass object M. This correction can at once reflects the heat transfer phenomenon in context of general relativity.

✉ Alamat korespondensi:
E-mail: triyanta@fi.itb.ac.id

ISSN 0215-9945

PENDAHULUAN

Berdasarkan definisinya, lubang hitam merupakan suatu daerah dalam ruang-waktu dengan medan gravitasi begitu kuat bahkan cahaya pun tidak dapat lolos. Sebuah lubang hitam terbentuk ketika sebuah objek bermassa *M* runtuh dan ukurannya lebih kecil dibandingkan radius Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$ (Frolov & Novikov 1998)

Dalam teori klasik, lubang hitam hanya dapat menyerap dan tidak dapat mengemisikan partikel. Tetapi melalui efek mekanika kuantum, lubang hitam dapat menciptakan dan mengemisikan partikel seolah-olah mereka adalah benda hitam dengan temperatur,

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} \ . \tag{1}$$

Emisi termal ini menyebabkan penurunan massa lubang hitam secara lambat hingga akhirnya menghilang (Hawking 1975). Semakin tinggi temperatur lubang hitam maka akan semakin kecil massanya (Triyanta & Bowaire 2013).

Dalam proses transfer panas suatu objek menuju objek lain distribusi temperaturnya mengikuti persamaan Fourier. Secara mendasar, persamaan Fourier klasik haruslah dikoreksi karena mengasumsikan cepat rambat panas memiliki nilai yang tak terbatas (Rubin 1992). Melalui penerapan prinsip relativitas khusus pada operator Laplacian diperoleh koreksi distribusi temperatur yang memiliki bentuk sama dengan persamaan konduksi panas hiperbolik. Hasil tersebut diketahui memiliki akurasi lebih tinggi dibandingkan persamaan Fourier klasik (Ali & Zhang, 2005; Ordóñes-Miranda & Alvarado-Gil, 2012).

Lubang hitam merupakan objek yang dapat melengkungkan ruang-waktu secara signifikan. Dengan demikian, operator Laplacian yang akan digunakan untuk menentukan distribusi temperatur lubang hitam harus disesuaikan agar sesuai dengan Laplacian pada ruang lengkung. Selama ini perhitungan distribusi temperatur pada ruang lengkung belum pernah dilakukan.

Di dalam makalah ini akan dibahas tentang proses transfer panas lubang hitam pada ruang-waktu Schwarzschild. Pembahasan tentang persamaan dasar Fourier akan dibahas pada bagian kedua, perumusan persamaan transfer panas pada lubang hitam Schwarzschild pada bagian ketiga, dan solusi pada keadaan tunak dibahas pada bagian keempat. Selain untuk menghitung distribusi temperatur dari lubang hitam, hasil pembahasan ini dapat digunakan untuk mengkoreksi persamaan Fourier klasik sehingga sesuai dengan teori relativitas umum. Hal ini dibutuhkan karena kehadiran setiap objek bermassa *M* akan membuat ruang-waktu melengkung.

Persamaan Transfer Panas

Untuk objek stasioner bertemperatur *T*, keseimbangan energi dipenuhi melalui persamaan sebagai berikut (Carslaw 1945)

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla . \vec{q} = 0 \ , \tag{2}$$

dengan ρ adalah densitas, C adalah kapasitas panas (pada temperatur T), $\vec{q}$ adalah vektor fluks termal, dan ∇ merupakan operator gradien yang secara klasik dapat dituliskan sebagai,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathrm{k}} \ . \tag{3}$$

Apabila objek bersifat homogen dan variasi temperatur dalam material tersebut begitu kecil sehingga sifat-sifatnya dapat diasumsikan bernilai konstan maka $\vec{q}$ dapat diaproksimasi sebagai,

$$\vec{q} = -k \ \nabla T \ , \tag{4}$$

dengan *k* merupakan konduktivitas termal. Melalui substitusi persamaan (4) ke dalam persamaam (1) maka akan diperoleh,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \ \nabla^2 T \ , \tag{5}$$

dengan,

$$\alpha = k/\rho C \ , \tag{6}$$

yang merupakan variabel difusivitas termal dan ∇^2 merupakan operator Laplacian yang secara klasik telah dikenal baik dengan bentuk,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ . \tag{7}$$

Persamaan (5) adalah persamaan yang menggambarkan proses distribusi panas yang lazim disebut sebagai persamaan Fourier (Pountney et al 2012).

Beberapa pengamatan seperti pada laser (Sanderson et al. 1995) dan beberapa divais modern (Wang & Li 2013 dan Hu & Chen 2012) menunjukkan bahwa persamaan (5) kurang tepat. Persamaan tersebut mengasumsikan panas dapat merambat pada kecepatan tak terhingga. Artinya, perambatan termal dapat dideteksi seketika meskipun jaraknya sangat jauh dan secara fisika hal ini tidak dapat diterima. Solusi untuk mengatasi permasalahan tersebut adalah menyusun persamaan transfer panas dengan kecepatan terbatas yang disebut dengan persamaan konduksi panas hiperbolik (Chen 2014),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\, \nabla^2 T - \frac{\alpha}{c}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\,. \tag{8}$$

Secara mendasar, persamaan (8) dapat diturunkan dengan mudah melalui penggantian operator Laplacian klasik dengan operator Laplacian relativistik yang dikenal sebagai operator d'Alembert (Ali & Zhang 2005). Dapat disimpulkan bahwa perambatan panas terjadi pada kecepatan terbatas dan dipengaruhi oleh komponen ruang-waktu. Dalam hal ini, efek relativistik muncul dalam ruang datar Minkowski.

Transfer Panas Lubang Hitam Schwarzschild

Elemen panjang Schwarzschild dalam koordinat umum t, r, θ, dan φ didefinisikan sebagai (Frolov & Novikov 1998), Suku pertama pada persamaan (14) menjelaskan tentang adanya batasan nilai cepat rambat termal c. Variabel dalam kurung pada suku pertama dan kedua berhubungan dengan kebergantungan distribusi termal pada massa objek (radius Schwarzschild). Dalam konteks relativitas

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{9}$$

Apabila sebuah objek memiliki radius sebesar radius Schwarzschild r_s maka komponen waktu akan menjadi singular. Kondisi tersebut menggambarkan kondisi lubang hitam Schwarzschild. Batasan antara bagian dalam lubang hitam dengan bagian luarnya disebut dengan cakrawala peristiwa. Karena dibatasi oleh singularitas maka kajian transfer panas lubang hitam dalam makalah ini hanya meninjau hingga batasan cakrawala peristiwa.

Dengan definisi,

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\,, \tag{10}$$

maka sesuai persamaan (9), komponen $g_{\mu\nu}$ dituliskan sebagai,

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left[-\left(1-\frac{r_s}{r}\right), \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}, r^2, r^2\sin^2\theta\right]. \tag{11}$$

Dalam ruang lengkung, operator Laplacian untuk suatu skalar ϕ ditentukan sebagai (Strichatz 1983),

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{g}\;\partial_\nu\phi\right), \tag{12}$$

dengan g merupakan determinan $g_{\mu\nu}$. Sedangkan untuk komponen $g^{\mu\nu}$ ditentukan melalui hubungan dengan $g_{\mu\nu}$ sebagai,

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left[-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \left(1-\frac{r_s}{r}\right), \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right]. \tag{13}$$

Sehingga melalui substitusi persamaan (13) pada definisi operator Laplacian (12) akan diperoleh Laplacian untuk temperatur pada ruang-waktu Schwarzschild yaitu,

$$\nabla^2 T = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\,. \tag{14}$$

umum kehadiran massa akan membuat ruang-waktu melengkung. Karena distribusi termal sifatnya dipengaruhi oleh gambaran ruang-waktu maka berdasarkan relativitas umum, distribusi temperatur juga dipengaruhi oleh massa objek. Melalui penggantian operator Laplacian pada persamaan (5) dengan operator Laplacian Schwarzschild pada persamaan (14), maka akan diperoleh persamaan transfer panas untuk lubang hitam Schwarzschild,

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left[-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\right]. \tag{15}$$

Pada kondisi tanpa kehadiran massa maka persamaan (15) akan mereduksi menjadi persamaan konduksi termal hiperbolik yang disajikan dalam koordinat bola. Melalui persamaan (15) dapat disimpulkan bahwa transfer panas lubang hitam Schwarzschild selain dipengaruhi oleh batasan cepat rambat termal juga dipengaruhi oleh massa objek (radius Schwarzschild). Selain untuk menghitung distribusi temperatur lubang hitam Schwarzschild persamaan transfer panas yang telah diperoleh secara umum juga dapat digunakan untuk menghitung distribusi temperatur pada sebarang ruang lengkung akibat kehadiran objek bermassa *M* atau untuk tinjauan sesuai dengan teori relativitas umum.

Solusi Keadaan Tunak

Salah satu kasus sederhana yang sering dipelajari dalam proses transfer panas adalah transfer panas pada keadaan tunak (*steady state*). Keadaan ini terjadi pada saat fungsi temperatur tidak lagi bergantung pada waktu. Dengan demikian persamaan (15) dapat direduksi,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}=0. \tag{16}$$

Apabila perhitungan dilakukan tanpa memperhitungkan massa objek maka persamaan (16) akan tereduksi menjadi persamaan transfer panas klasik pada keadaan tunak. Karena temperatur tidak bergantung pada waktu maka temperatur dapat dinyatakan secara sederhana sebagai fungsi *r, θ,* dan *φ*,

$$T=R(r)Y(\theta,\varphi). \tag{17}$$

Melalui substitusi ke dalam persamaan (16) dengan metode separasi variabel akan diperoleh persamaan untuk komponen $Y(\theta,\varphi)$,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0, \tag{18}$$

yang memiliki solusi berupa fungsi *spherical harmonics*,

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{19}$$

dengan $P_l^m(\cos\theta)$ merupakan polinomial Legendre sedangkan l adalah integer non-negatif sehingga $Y(\theta,\varphi)$ memiliki nilai yang konvergen.

Untuk komponen radial akan didapatkan persamaan,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\left(1-\frac{r_s}{r}\right)r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)-l(l+1)R=0. \tag{20}$$

Dengan mendefinisikan,

$$z=\left(1-\frac{2r}{r_s}\right), \tag{21}$$

maka persamaan (20) dapat dituliskan sebagai,

$$\left(1-z^2\right)\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}-2z\frac{\partial R}{\partial z}+l\left(l+1\right)R=0\,. \qquad (22)$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan yang dikenal sebagai persamaan Legendre yang solusinya adalah,

$$R=aP_l\left(1-\frac{2r}{r_s}\right)+bQ_l\left(1-\frac{2r}{r_s}\right). \qquad (23)$$

Melalui substitusi persamaan (19) dan (23) ke dalam persamaan (17) maka akan diperoleh solusi distirbusi temperatur pada keadaan tunak adalah,

$$T=\left\{aP_l\left(1-\frac{2r}{r_s}\right)+bQ_l\left(1-\frac{2r}{r_s}\right)\right\}Y_l^m\left(\theta,\varphi\right), \qquad (24)$$

dengan P_l dan Q_l masing-masing merupakan fungsi Legendre pertama dan kedua. Variabel *a* dan *b* merupakan konstanta yang nilainya ditentukan oleh syarat batas. Solusi tersebut menunjukkan bahwa dalam ruang-waktu Schwarzschild distribusi temperatur selain bergantung pada jarak titik tinjau juga bergantung radius Schwarzschild-nya. Namun karena tinjauan dibatasi oleh cakrawala peristiwa maka distribusi temperatur hanya berlaku untuk kondisi $r \ge r_s$. Khusus untuk tinjauan tepat di cakrawala peristiwa, yaitu $r = r_s$, polinomial Legendre masing-masing akan bernilai $P_l\left(-1\right)$ dan $Q_l\left(-1\right)$. Pada cakrawala peristiwa temperatur bernilai terbatas, maka pada radius Schwarzschild mengharuskan konstanta *b* bernilai nol agar temperatur tidak bernilai tak berhingga karena polinomial Legendre kedua $Q_l\left(-1\right)$ bersifat tak konvergen. Dengan demikian pada radius Schwarzschild persamaan temperatur dapat dituliskan secara lebih sederhana sebagai,

$$T=a\,P_l\left(-1\right)Y_l^m\left(\theta,\varphi\right). \qquad (25)$$

Apabila persamaan (16) tidak bernilai nol, melainkan memiliki nilai sebagai suatu konstanta *x*, maka juga berlaku kondisi,

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=x\,, \qquad (26)$$

yang memiliki solusi berupa,

$$T\left(t\right)=\alpha xt-\frac{A\alpha r}{c^2\left(r-r_s\right)}\,e^{-\frac{tc^2\left(r-r_s\right)}{\alpha r}}\,, \qquad (27)$$

dengan *A* merupakan sebuah konstanta yang ditentukan oleh keadaan awal. Pada kondisi tersebut tampak bahwa distribusi temperatur mengandung suku yang berkurang secara eksponensial terhadap fungsi waktu, radius, dan massa objek yang didefinisikan sebagai radius Schwarzschild. Namun di sisi lain, persamaan tersebut pada suku pertama sebelah kanan mengandung suku yang bertambah seiring pertambahan waktu. Dengan mendefinisikan konstanta bernilai satu maka berdasarkan signifikasinya, pada kasus ini akan diperoleh kesimpulan bahwa temperatur di sekitar lubang Schwarzschild bertambah seiring pertambahan waktu.

PENUTUP

Lubang hitam memiliki temperatur yang nilainya berbanding terbalik dengan massanya. Persamaan transfer panas didefinisikan dengan baik melalui persamaan Fourier. Beberapa pengamatan menunjukkan bahwa penggantian operator Laplacian klasik dengan operator d'Alembert akan menghasilkan persamaan transfer panas yang lebih baik. Untuk menghitung distribusi temperatur di sekitar lubang hitam digunakan operator Laplacian yang berlaku untuk ruang lengkung. Karena pada daerah sekitar lubang hitam kelengkungan ruang-waktu tidak lagi dapat diabaikan. Persamaan Fourier dalam ruang-waktu Schwarzschild bergantung pada jarak tinjau dan juga massa objek. Untuk keadaan tunak, distribusi temperatur yang dihasilkan dapat dinyatakan secara sederhana sebagai fungsi Legendre pertama dan kedua (komponen radial) serta fungsi *spherical harmonics* (komponen sudut ruang). Fungsi Legendre tersebut bergantung pada jarak dan radius Schwarzschild. Untuk kasus dengan persamaan diferensial yang bergantung pada waktu bernilai konstan diperoleh distribusi temperatur bergantung pada waktu, radius, dan massa objek.

UCAPAN TERIMA KASIH

Riset ini mendapat dukungan dari "Riset Desentralisasi DIKTI 2014".

DAFTAR PUSTAKA

Ali Y M & Zhang L C. 2005. Relativistic heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48: 2397-2406

Carslaw H S. 1945. *Introduction to the Mathematical Theory of the Conduction Solids,* New York: Dover Publications

Chen T M. 2014. A hybrid transform technique for the hyperbolic heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 65: 274-279.

Frolov V P & Novikov I D. 1998. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Netherlands: Springer

Hawking S W. 1975. Particle creation by black holes *Communication in Mathematical Physics* 43: 199-220

Hu K & Chen Z. 2012. Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal impact loading using the hyperbolic heat conduction theory. *International Journal of Engineering Science* 51: 144-160

Ordóñes-Miranda J & Alvarado-Gil J J. 2012. Determination of thermal properties for hyperbolic heat transport using a frequency-modulated excitation source. *International Journal of Engineering Science* 50: 101-112

Pountney O, Cho G, Lock G D & Owen J M. 2012 Solutions of Fourier's equation appropriate for experiments using thermochromic liquid crystal. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55: 5908-5915

Rubin M B. 1992. Hyperbolic heat conduction and the second law. *International Journal of Engineering Science* 30 :1665-1676

Sanderson T, Ume C & Jarzynsk J. 1995. Hyperbolic heat equations in laser generated ultrasound models. *Ultrasonics* 33: 415-421

Strichatz R S. 1983. Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold. *Journal of Functional Analysis* 52: 48-79

Triyanta & Bowaire A N. 2013. Hawking Temperature of the Reissner-Nordstrom-Vaidya Black Hole. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences* 45: 114-123

Wang B L & Li J E. 2013. Hyperbolic heat conduction and associated transient thermal fracture for a piezoelectric material layer. *International Journal of Solids and Structures* 50: 1415-1424